Definitud y completud semántica. Una nueva revisión a las *Göttinger Doppelvortrag* de E. Husserl

Definiteness, and Semantic Completeness. An Analysis of E. Husserl's *Göttinger Doppelvortrag*

DOI:
doi.org/10.23924/oi.v15i33.622

Luis Alberto Canela Morales
El Colegio de Veracruz
lcanelamorales@gmail.com
orcid.org/0000000237405234

Resumen

La importancia de las *Göttinger Doppelvortrag* (1901) se debe a que en ellas se encuentra el intento de E. Husserl por responder al "problema de lo imaginario" en matemáticas a partir de sus resultados en torno al concepto de variedad y completud (*Vollständigkeit*) de un sistema axiomático. Según Husserl, abordar el problema de lo imaginario significaba dar solución a tres preguntas fundamentales: 1) ¿cuándo se vuelve imaginario un elemento desde la perspectiva de un sistema axiomático formal?; 2) ¿cómo se justifica el uso de elementos imaginarios en matemáticas? y 3) ¿es compatible un sistema axiomático completo con la extensión del concepto de número? En este artículo presentaré tales respuestas y justificaré por qué son parcialmente correctas. Así, en la primera parte de este escrito se presentará el problema de lo imaginario y en la segunda se estudiará la propuesta de Husserl para resolver los problemas antes mencionados.

Palabras clave

Axiomática, completud semántica, definitud, imaginario, variedad.

Abstract

The significance of E. Husserl's *Göttingen Lectures* of 1901 lies in his attempt to address the problem of the imaginary in mathematics, which he approached through his findings on the concepts of variety and completeness (*Vollständigkeit*) of an axiomatic system. According to Husserl, solving the problem of the imaginary involved finding answers to three fundamental questions: 1) when does an element become imaginary from the perspective of a formal axiomatic system? 2) how can the use of imaginary elements in mathematics be justified? and 3) is a syntactically complete axiomatic system compatible with the extension of the concept of number? In this article, I will present Husserl's answers to these questions and provide a partial justification for their correctness. I will divide the content of both lectures into two parts. The first part will present the problem of the imaginary, and the second will examine Husserl's proposal for addressing the aforementioned problems.

Keywords

Axiomatic, definiteness, Imaginary, manifold, semantic completeness.

Introducción

En la quinta sesión de la Sociedad Matemática de Gotinga (26 de noviembre de 1901), Husserl pronunció la primera parte de una conferencia titulada “El pasaje a través de lo imposible y la completud (*Vollständigkeit*)[1] de un sistema axiomático”. La segunda parte de esta conferencia se continuó en la séptima sesión de dicha Sociedad (10 de diciembre del mismo año). En la primera parte, Husserl presentó sus apuntes iniciales sobre una teoría capaz de extenderse al dominio de lo imaginario (*das Imaginäre*) matemático. En la segunda parte, los temas revisados fueron el concepto de “definitud” (*Definitheit*) y la noción de “sistema definido absoluto” (Schuhmann y Schuhmann, 2001: 87-88). La edición de “ambos” textos ahora se conoce como *Göttinger Doppelvortrag* (de ahora en adelante las conferencias de Gotinga).[2]

La importancia de estas conferencias se debe a que en ellas se encuentra el intento de Husserl por responder al “problema de lo imaginario” en matemáticas a partir de sus resultados en torno al concepto de variedad formal. Desde la perspectiva de Husserl, abordar el problema de lo imaginario significaba dar solución a tres preguntas fundamentales: 1) ¿cuándo se vuelve imaginario un elemento/objeto desde la perspectiva de un sistema axiomático formal? (problema ontológico); 2) ¿cómo se justifica el uso de elementos/objetos imaginarios

1 Una primera aproximación al estudio de estas conferencias se encuentra en mi libro *Ser y Calcular* (2023). De ahora en adelante, *completud* y *definitud* traducen los conceptos *Vollständigkeit* y *Definitheit*.

2 Estas conferencias se conservan bajo la notación K I 26 de los Archivos Husserl de Lovaina. Para esta investigación utilizaré la edición de Schuhmann y Schuhmann (2001) por ser la edición más completa comparada con la edición de L. Eley, incluida en Hua XII, que también será citada cuando así se requiera. En lo sucesivo, citaré el número de página de la edición de Schuhmann y Schuhmann y el pasaje correspondiente al folio K I 26, y cuando se hable de *Filosofía de la aritmética* simplemente citaré como Hua XII y el número de página en arábigos.

en matemáticas? (problema epistemológico) (da Silva, 2000a: 417) y 3) ¿es compatible un sistema axiomático sintácticamente completo con la extensión del concepto de número? (problema formal). En este artículo presentaré dichas respuestas y justificaré porque son parcialmente correctas. Para ello dividiré en dos partes lo expuesto en ambas conferencias. En la primera parte se presentará el problema de lo imaginario y en la segunda se estudiará la propuesta de Husserl para resolver los problemas antes mencionados.

El problema de lo imaginario y el acceso a nuevos dominios numéricos

En 1901 Husserl aborda, con detalle, el problema de lo imaginario[3] asumiendo sus primeras herramientas teóricas ganadas hasta ese

3 De ahora en adelante se entenderá por "imaginario" o "el problema de lo imaginario" el uso de conceptos numéricos de mayor complejidad. Para Husserl, el problema de los elementos imaginarios en aritmética abarca los números negativos, racionales, irracionales y complejos. El problema de la transición a través de lo imposible o el pasaje a través de lo imaginario en matemáticas no fue una preocupación ajena en las obras de Husserl, las referencias a este tema abarcan desde 1891 hasta 1929, con muy pocas variantes entre ellas (ver § 70, de Hua XIX/1 (1901); § 19, de Hua XXIV (1906-1907); § 72-73, de Hua III/1 (1913); y el capítulo III de Hua XVII (1929)). Incluso se podría decir que el problema de lo imaginario en matemáticas mantiene relación con la conformación simbólica del conocimiento científico y la formalización de la ciencia, es decir, según Husserl, se tiene un conocimiento simbólico cuando un objeto se da a nosotros de manera indirecta, es decir, a través de signos. Lo verdaderamente importante en este punto es, justamente, el carácter "subrogatorio" del conocimiento simbólico. Para Husserl, el conocimiento simbólico aparece a modo de un representante, de un sustituto que actúa como una señal indicativa para un objeto (y sólo para ese objeto o sistema de objetos). Básicamente son cuatro las características principales del conocimiento simbólico en Husserl: I) los símbolos pueden llegar a ser independientes de su significado y, por tanto, de la interpretación que se les asigne; II) los símbolos tienen un fin instrumental; III) los símbolos pueden recibir diferentes interpretaciones, y IV), quizás la más destacable, los sistemas simbólicos permiten presentificarnos entidades "imposibles" y operar con ellas. De manera muy particular, en la reseña a las *Lecciones sobre el álgebra de la lógica*, de Schröder (Hua XXII, 3-43), Husserl establece que los símbolos y transformaciones simbólicas que Schröder presenta como un cálculo lógico no pueden ser admitidos como tales pues no establecen correctamente una teoría pura de la deducción. En todo caso, sería una técnica de la consecuencia y no una lógica. Aquí aparece una primera exigencia al posible tratamiento de lo imaginario: un cálculo debe estar técnica y lógicamente justificado. En el caso de la introducción de los símbolos imaginarios estos se justifican en virtud de que su aplicación no genera inconsistencias

momento: 1) la noción de *conocimiento simbólico*; 2) los conceptos de *operación* y *dominio numérico* y 3) el concepto de variedad (en especial, las propuestas de Grassmann, Hankel y Riemann).[4] Estas herramientas garantizan que la expansión del dominio de los números no dependa únicamente de una base conceptual sino de la *técnica* de la aritmética, es decir, de los signos y reglas de cálculo utilizados. Siguiendo lo anterior, Husserl desarrollará tres *ideas* en torno al problema de lo imaginario en matemáticas: 1) la justificación del acceso a lo imaginario a través del conocimiento simbólico; 2), la fundamentación de la *extensión* de un *dominio numérico* y 3) la diferenciación entre definitud relativa y definitud absoluta.

En la primera conferencia, Husserl señala lo siguiente:

> Una teoría elaborada sistemáticamente en este sentido se define por una colección (*Inbegriff*) de axiomas formales, es decir, por un número limitado de proposiciones fundamentales (*Grundsätze*) puramente formales, mutuamente consistentes e independientes entre sí. La deducción sistemática proporciona de manera puramente lógica, es decir, de acuerdo con el principio de contradicción (*Prinzip vom Widerspruch*), las proposiciones dependientes y, con ello, la colección total de las proposiciones (*Gesamtinbegriff von Sätzen*) que pertenecen a la teoría definida. Sin embargo, el dominio de objetos se define por los axiomas en el sentido de que se delimita como una cierta esfera de los objetos en general, independientemente de si son reales o ideales, para los cuales se aplican las proposiciones fundamentales de tales y tales formas válidas (2001: 91 / K I 26: 76).

Según Husserl, una teoría elaborada *sistemáticamente* es una teoría *sintácticamente* completa, esto es, definida formalmente y de forma

formales, al menos desde una perspectiva puramente algorítmica. La diferencia de este primer intento con las conferencias de Gotinga, como ya se verá, es que Husserl todavía no trata con sistemas simbólicos puramente formales, sino con sistemas que pretenden cumplir sus intenciones de interpretación.

4 Para una comprensión de la influencia de estos autores en la obra de E. Husserl, ver Canela Morales (2019).

única por la suma o colección total de los axiomas que la caracterizan. Una teoría de este tipo se denomina "variedad definida" (2001: 91 / K I 26: 76). Una variedad definida (o completa) comparte su estructura formal con otros dominios de teorías isomorfas. Más adelante añade:

> Supongamos un dominio (*Gebiet*) de objetos dados en el cual, a través de la peculiar naturaleza de los objetos, las formas de combinación y relación están determinadas expresándose en un cierto axioma del sistema A. Sobre la base de este sistema, y así sobre la base de la particular naturaleza de los objetos, ciertas formas de combinación no tienen un significado real (*reale Bedeutung*), es decir, ellas son formas de combinación en contrasentido (*widersinnige Verknüpfungsformen*) (2001: 93) / K I 26: 77).

Un dominio (o "esfera de existencia") se define a partir de un grupo de axiomas donde un sistema de objetos (*Systeme von Dingen*) satisface determinadas leyes generales. Los elementos de un dominio no son necesariamente objetos especificados sino, más bien, objetos formales no especificados o también, como a veces los llama, formas de objetos. Asimismo, si bien estos objetos formales están denotados por términos y singularizados por descripciones no pueden reducirse o ser entendidos como meras entidades lingüísticas. Se trata, dice Husserl, de estudiar, dentro de un sistema dado, aquellas formas de combinación que no tienen un significado real[5] y, por tanto, implican un *contrasentido* (o son "contradictorias") dentro del modelo de sistema en cuestión. Parece ser que Husserl tenía en mente la tradición de los algebristas

5 Aquí cabe añadir una nota terminológica: lo real (*real*) es, en Husserl, lo que pertenece a lo físico en general o que está entrelazado con él. Lo real (*wirklich*) es lo que efectivamente existe, independientemente del ámbito de ser que le competa. Lo real (*reell*) tiene que ver con la "naturaleza subjetiva", el "ser-de-conciencia". Ahora bien, lo que Husserl alcanza a reconocer en el § 5 de los *Prolegómenos* es que lo real se toma, ante todo, como lo espacial y lo temporal (lo existente en el tiempo). Es real lo que puede ser considerado causa o efecto de algo, mientras que lo ideal, en tanto clase complementaria de lo real, refiere a aquellos objetos que no son considerados causas o efectos de otros. Desde luego, la anterior distinción no se limita al ser real y al ser ideal, también incluye a las posibilidades e imposibilidades reales e ideales, y a la inteligibilidad ideal (o posible) y la inteligibilidad efectiva (o actual).

y los geómetras de clasificar sistemas de objetos atendiendo a las leyes formales que satisfacían estos sistemas. Desde esta perspectiva, las cuestiones a pendientes por resolver serían: 1) ¿cuándo se vuelve imaginario un elemento desde la perspectiva de un sistema axiomático formal?; 2) ¿cómo se justifica el uso de elementos imaginarios en matemáticas? y 3) ¿es compatible un sistema axiomático completo con la extensión del concepto de número? (2001: 93 / K I 26: 77).

En estas preguntas se presentan tres temas importantes: 1) la inserción de lo imaginario en una teoría definida, 2) justificar el uso de lo imaginario y 3) demostrar que la solución al problema de lo imaginario se relaciona con la propiedad formal de definitud. Si he entendido bien, el punto exacto de partida de las conferencias de Gotinga es, justamente, el lugar donde confluyen los tres temas anteriores, es decir, la definición de un dominio formal y su posible expansión. Así, comprender el problema de lo imaginario en matemáticas significa vislumbrar qué se entiende por dominio formal, cómo se delimita y cómo podría expandirse. Ahora bien, el desarrollo completo de esta propuesta puede dividirse en cuatro argumentos; cada uno de ellos muestra una condición para la correcta comprensión, delimitación y extensión de un sistema dado (K I 26: 77 – K I 26: 80).

Argumento I): Una teoría axiomática está completa si determina su dominio matemático (variedad definida). Esto significa dejar sin ambigüedades la estructura de su dominio.

Argumento II): El sistema original es (sintácticamente) completo y el sistema ampliado es consistente.[6]

6 Estos primeros dos argumentos suponen la propiedad de conservación, es decir, el sistema ampliado es una extensión conservadora del original. Siguiendo a Okada (2013) y a Majer (1997), dos sistemas axiomáticos formales ($S1 \subset S2$) donde:
$S1$ = Sistema original (real).
$S2$ = Sistema ampliado con algunos imaginarios.
Para toda proposición real A de $S1$, si A es demostrable en $S2$, entonces A es demostrable en $S1$ [Propiedad de conservación], es decir:
$S2 \vdash A \rightarrow S1 \vdash A$
Entonces, $S2$ denota una extensión conservada de $S1$ y $S1$ se nombra como un subsistema conservativo de $S2$.

Argumento III): Para extender la noción de completud a sistemas no interpretados es necesario definir cuál es el dominio de una teoría como tal (da Silva, 2000b: 44).

Argumento IV): En el uso de lo imaginario en matemáticas deben considerarse los criterios y reglas con los que se dice que algo es "imaginario" (desde la perspectiva de un sistema originalmente dado).

Tomando todo lo anterior, Husserl plantea dos cuestiones: la relativa a las condiciones en que se pueden deducir, componer y extender "libremente" ciertas proposiciones a partir de proposiciones y sistemas originales, y la relativa a la validez de las proposiciones y sistemas extendidos que están, aparentemente, libres de contradicciones. La respuesta que Husserl anticipa al problema puede presentarse de este modo: *si queremos expandir un concepto más allá de su definición original debemos proceder de tal manera que se preserven, en la medida de lo posible, las viejas reglas de cálculo original* (2001: 97-98 / K I 26: 81). El argumento para sostener lo anterior puede reconstruirse de la siguiente manera: sea G un determinado campo concreto. Sea A_G el conjunto de axiomas relativos a G. Sea F_G el conjunto de proposiciones lógicamente derivadas de A_G (es decir, el conjunto de consecuencias lógicas *F*) y sea $A\Gamma$ la expansión de A_G. Por tanto: $A_G \subseteq A\Gamma$ y $F\Gamma = F(A_G + A')$ (Centrone, 2010: 164-165). Lo que Husserl propone es que un campo formal (expandido) no tiene las mismas limitaciones que el campo original, es decir, los nuevos teoremas A' no tendrían las mismas restricciones de A. Sin embargo, la teoría de la permanencia en este punto establece que si la expansión ($A\Gamma$) es consistente, lo es porque es conservativa respecto de A_G. Por tanto, cabe el supuesto de que toda proposición del sistema extendido incluya o no una inconsistencia; el problema ahora está en saber si esto ocurre (2001: 97 / K I 26: 81). En realidad, este planteamiento puede dividirse en dos problemas distintos pero complementarios:

1) ¿Bajo qué condiciones es $A\Gamma$, la expansión de AG, consistente?

2) ¿Bajo qué condiciones es conservativa la teoría AΓ sobre AG? En otras palabras, ¿bajo qué condiciones son las expresiones de AΓ comprobables en G y por tanto verdaderas en el campo interpretado de G? (Centrone, 2010: 165).

Estas preguntas no serán solucionadas hasta la segunda parte de la conferencia.

Variedad definida y dominio formal

Las ediciones de Schuhmann y Schuhmann (2001) y L. Eley (Husserl, 1970) coinciden en que la segunda parte de la conferencia de Husserl comienza a partir de la distinción de los tipos de variedades (definida y formal), a la vez que delimita tres problemas relacionados con ellas:

1. ¿Puede una variedad definida ser excluida a través de un axioma de clausura?[7] (*Schliessungs-Axiom*).

2. ¿Puede una variedad puramente algebraica, que no define a ningún individuo, tener el carácter de una variedad definida?

3. Sistemas de operaciones que no excluyen a los individuos en la generación del dominio: 1) no todos los resultados operacionales generalmente definidos y existentes pertenecen a la esfera de los individuos operacionalmente producibles y 2) Sistemas matemáticos donde todo lo que existe está determinado operativamente de manera única (2001: 99-100 / K I 26: 93).

Para entender qué es lo que Husserl está cuestionando hay que añadir una serie de definiciones procedentes de los textos que complementan las conferencias de Gotinga (Hua XII: 452-500). Siguiendo estos pasajes se puede postular lo siguiente: para Husserl un

7 El cual establece que la intersección de cualquier colección de conjuntos cerrados en una determinada topología debe ser también un conjunto cerrado.

sistema axiomático es un *conjunto* limitado de proposiciones fundamentales puramente formales coherentes e interdependientes entre sí (Hua XII: 496). Este conjunto finito se rige por un *sistema operativo* que, como su nombre lo indica, consiste en un conjunto de leyes de operación (Hua XII: 496), es decir, "designa un conjunto predefinido de reglas de derivación (o cálculo) de las consecuencias lógicas de los axiomas". El o los dominios formales de los sistemas axiomáticos tienen dos aspectos correlativos: la *dimensión estructural* que corresponde a lo que Husserl llama "variedad" entendida como una totalidad genérica compuesta por una multiplicidad de elementos u objetos que son individualmente distintos, formales o abstractos e inscritos en un tejido de relaciones o uniones (Gustavo Isaac, 2015) y la *dimensión operacional* que corresponde a la forma específica en este o aquel "dominio de operación" (*Operationsgebiet*), por ejemplo: +, –, ×, actúa sobre sus elementos u objetos, determina, pues, las relaciones de un objeto por medio de objetos dados (Hua XII: 467, 493, 541).

Ahora bien, la delimitación efectuada por un sistema axiomático en el conjunto de objetos formales constituye, a su vez, una *indeterminación* de los dominios relativos al sistema axiomático en cuestión. Dicho de otra manera: para cada ley de operación trabajada por una variedad, el sistema axiomático también incluye "axiomas de existencia" que garantizan, por un lado, la existencia de la variedad de objetos a los que se aplica esta forma de relación y, por otro lado, que el producto de las relaciones o uniones operadas en la multiplicidad corresponda a un objeto existente en la variedad (Gustavo Isaac, 2015: 7; Hua XII: 470). Si, por ejemplo, el dominio correlativo de las operaciones de una multiplicidad de objetos formales incluye la operación "+", entonces deben existir dentro de esta multiplicidad al menos dos objetos (a y b) que sean alcanzables por esta operación (en la forma: a + b) y un elemento correspondiente al producto de esta operación (una x tal que x = a + b): [8]

8 La adición de un axioma de cierre a un sistema de axiomas opera, justamente, como una clausura. En este sentido, es un axioma "negativo" que da lugar a un concepto de "completud no auténtica" (Hua XII: 442).

> En este sentido, una teoría elaborada sistemáticamente es definida por una colección de axiomas formales, es decir, por un número limitado de axiomas puramente formales de acuerdo a los principios de consistencia e independencia (2001: 91 / K I 26: 76).

> Dominio. Establece lo que se entenderá bajo un dominio de un sistema axiomático (2001: 98 / K I 26: 43).

> Un sistema axiomático "define" un dominio, una variedad, y esta no excluye que existan aun más objetos los cuales satisfacen el sistema axiomático además de estos definidos. Pero estos otros objetos son indefinidos (2001: 98 / K I 26: 43).

Según lo dicho en la primera conferencia, la definitud de los sistemas interpretados (o significativos) está en correspondencia con los dominios (objetuales) que describen (o con los que tratan). Si atendemos este punto, para Husserl tiene sentido la expresión "ϕ es verdadera en A", esto es, la idea de que la fórmula o proposición lógica ϕ es satisfecha o cumple ciertas condiciones o se verifica en el conjunto A (o en una determinada esfera de objetos). En otras palabras, "ϕ es verdadera en A" significa que cuando se evalúa la fórmula o proposición ϕ utilizando los elementos del conjunto A, se obtiene un resultado verdadero o verdadero por definición. Por lo tanto, la verdad o falsedad de ϕ depende del conjunto o esfera de objetos. Por tanto, Husserl debe responder a la siguiente pregunta ¿cuál es el dominio (objetual) de un sistema no interpretado o puramente formal? El problema en este asunto es que en la completud de las teorías interpretadas se mencionan explícitamente sus (múltiples) descripciones o intenciones de interpretación o propiedades significativas. Pero en los sistemas no interpretados nada de esto es evidenciado. Una respuesta fácil, pero incorrecta, es señalar que las teorías no interpretadas no tienen descripciones o intenciones de interpretación. Sin embargo, para Husserl las teorías no interpretadas también tienen, al menos en germen, dominios o intenciones de interpretación, pero estos no son dominios que correspondan a objetos determinados, sino más bien a objetos indeterminados (pero susceptibles de múltiples interpretaciones) (2001: 100 / K I 26: 93).

Con todo, cabe preguntar: ¿cuáles son las condiciones para que un objeto formal pueda pertenecer a una variedad formal? La respuesta de Husserl en esta segunda conferencia señala que un objeto formal (un *algo* indeterminado) caracterizado por una cierta propiedad *F(x)*, pertenece al dominio formal determinado por una teoría formal *T* siempre que la fórmula *F(x)* pertenezca al lenguaje de *T* y, además, *T* pruebe que *existe una única x tal que F (x)* y viceversa. En otras palabras, un objeto formal es simplemente un *algo* indeterminado que satisface cierta propiedad que puede ser expresada en el lenguaje de la teoría en cuestión. Así, si se transfiere la noción de definitud de teorías interpretadas a teorías no interpretadas sustituyendo las intenciones de interpretación por variedades formales, obtenemos lo siguiente: una teoría no interpretada será *relativamente* definida cuando: *i*) en ella se decida cualquier aseveración que se refiera a su variedad formal y *ii*) ella sea sintácticamente completa. Dicho de otro modo, para Husserl una teoría no interpretada es *relativamente* definida cuando cada una de sus proposiciones significativas se decide bajo su campo de restricción, es decir, si cada fórmula (del lenguaje de la teoría) es demostrable o refutable en ella (2001: 102 / K I 26: 95).

Hasta este momento, la definitud de un sistema no interpretado parece corresponderse con su completud sintáctica, esto es, en relación con un subconjunto de afirmaciones expresables en el lenguaje de la teoría. No obstante, Husserl explora la posibilidad de que una teoría no interpretada, aunque sea definida, pueda no ser sintácticamente completa. En esta parte aparecerían dos versiones de definitud (no equivalentes) para sistemas no interpretados. Por un lado, la definitud *relativa* y, por el otro, la definitud *absoluta* (en tanto completud semántica). Antes de continuar, me detendré brevemente en este punto.

Recientemente se ha propuesto (Arana, 2020 y 2021) que "definitud absoluta" debería entenderse como completud semántica, esto es, que una teoría Γ en un lenguaje L es semánticamente completa si, para cada oración ϕ de L, o bien ϕ o bien $\neg\phi$ es una consecuencia lógica de Γ, pero no ambas. La noción de completud semántica se obtiene sustituyendo el concepto de demostrabilidad por su homólogo semántico, el de consecuencia lógica. La idea básica es que una teoría es semánticamente completa si todas las oraciones verdaderas que se pueden formular dentro de ella son consecuencias lógicas de sus axiomas, es decir, si todas las oraciones verdaderas que son verdaderas en cualquier modelo son deducibles a partir de los axiomas mediante reglas de inferencia. La completud semántica se refiere a la relación entre las oraciones de la teoría y los objetos que representan. Así, en contraste con la completud sintáctica que se enfoca en la capacidad de un sistema formal para demostrar todas las fórmulas verdaderas dentro del sistema, la completud semántica se enfoca en la capacidad de un sistema para capturar y/o reflejar el significado de todas las fórmulas verdaderas en un lenguaje formal dado. En otras palabras, el sistema formal es capaz de reconocer y expresar todos los hechos verdaderos que se pueden expresar en el lenguaje formal, y proporcionar una interpretación semántica para cada una de las fórmulas verdaderas en el lenguaje formal.

Sobre este respecto, Husserl señala lo siguiente:

> Un sistema axiomático es relativamente definido (*definit*) si para su dominio de existencia no admite más axiomas adicionales, pero admite que para otro dominio más amplio son válidos los mismos axiomas y naturalmente los nuevos axiomas [...] Relativamente definida es la esfera de los números enteros, los números fraccionarios, los números racionales, así como la serie discreta de pares ordenados de números (números complejos). Llamo a una variedad definida absolutamente cuando no existe otra variedad que contengan estos mismos axiomas (todos juntos) (2001: 102 / K I 26: 95).

El dominio de un sistema, según lo ya establecido, se define como una colección de entidades que el sistema axiomático requiere que exista. Por ejemplo, la aritmética de los números naturales requiere la existencia de 0 y un sucesor para cada número. Un dominio siempre es completo o absoluto cuando se define a partir de sus propios axiomas (o de sus objetos formales o formas de objetos) y sus dominios posibles o circunscritos. Dicho con más detalle:

> Un sistema axiomático es relativamente definido si toda proposición significativa, de acuerdo a este sistema, se decide bajo las restricciones de su dominio.
>
> Un sistema axiomático es absolutamente definido si toda proposición significativa dentro de él se decide en general.
>
> Por lo tanto, absolutamente definido = completo en el sentido de Hilbert (2001: 103 / K I 26: 82).

A partir de la diferencia entre la definitud relativa y la definitud absoluta, Husserl esboza una respuesta más completa para la justificación de los números imaginarios:

a) Sistema *relativo* definido. Que un sistema axiomático sea relativamente definido significa, por un lado, que este sistema es irreductible y, por otro lado, que la completud deductiva y la máxima consistencia del sistema en cuestión son relativas a su dominio (2001: 103 / K I 26: 82). Por tanto, tal sistema axiomático es ciertamente completo, *pero* de una manera limitada, en el sentido de que, según sus definiciones, ningún resultado posible de operación permanece abierto (2001: 103 / K I 26: 82). En otras palabras, tal sistema permanece *inesencialmente completo* ya que deja abierta la fijación formal de relaciones (o uniones) y posibles operaciones para todo el *dominio de existencia* en general (Hua XII: 455). Como tal, un sistema axiomático relativamente definido es un sistema extensible (Gustavo Isaac, 2015: 18).

b) Sistema *absoluto* definido. La definitud absoluta de un sistema axiomático significa que su completud deductiva y su consistencia máxima no se limitan a ningún dominio, sino que valen *en general* (2001: 103 / K I 26: 82). En ella sus definiciones se despliegan hasta tal punto que ningún resultado posible de operación queda abierto; tal sistema axiomático es, por tanto, *absolutamente completo* (*absolut komplett*) (2001: 107 / K I 26: 85). Este estado de completud absoluta puede explicarse por el hecho de que ya se ha logrado cualquier fijación semántica de relaciones o uniones y posibles operaciones para todo el dominio de su existencia en general (Hua XII: 455); como tal, no puede ser ampliado por nuevas leyes operativas que determinan, en un dominio extendido, nuevas formas de operaciones que vinculan nuevos conceptos de objetos. Por tanto, su propio dominio es no-extensible,[9] sin que sus axiomas originales dejen de ser válidos (2001: 102-105 / K I 26: 94, K I 26: 84; Gustavo Isaac, 2015: 19). Se dice, entonces, que un sistema axiomático absolutamente definido es esencialmente completo (*wesentlich vollständige*) (Hua XII, 455) en el sentido semántico del término. Arana (2020) apunta a algo interesante, y es que, en las conferencias de Gotinga, Husserl dice explícitamente "absolutamente definido = completo en el sentido de Hilbert" (2001: 103 / K I 26: 82), dado que el concepto de completud de Hilbert se refería a modelos no-extensibles y, si la definitud absoluta es equivalente a la completud en el sentido de Hilbert, entonces la "definitud absoluta" debe referirse también a la no-extensibilidad.

Una vez establecidas las definiciones necesarias se deben contemplar todas las aristas del problema de lo imaginario. Una de ellas es, precisamente, que su solución va más allá de comprender cómo una teoría no-interpretada definida se abre paso en su expansión. Veamos un ejemplo: supongamos que A es un sistema interpretado (con un dominio objetual) y A_w un sistema extendido (y no interpretado) de A. Si el sistema A es consistente, toda proposición que contenga contradicción y que pueda ser derivada de A_w contiene contradicciones en A. Según lo anterior ¿es válido suponer que A_w deriva sus propiedades a partir del dominio de *A* utilizando como criterio

9 Dicho sea de paso, se sabe que Husserl estuvo presente en la conferencia de Hilbert intitulada "Clausura de los sistemas axiomáticos", presentada días antes de su participación (Hua XII: 444-451).

necesario y suficiente la consistencia de *A*? La respuesta de Husserl es que no. Él no creía que la mera extensión del concepto de número, en tanto condición necesaria y suficiente, debiera ser conservativa. En realidad, la expansión de la serie numérica conduce a un nuevo dominio en el que se denotan nuevas relaciones y elementos:

> La serie de los números enteros positivos es una parte de la serie de los números infinitos bilaterales. Esta última, a su vez, forma parte de la doble variedad de los números complejos. El sistema de los números enteros positivos se define por ciertas relaciones elementales. En estas últimas nada se modifica mediante la expansión de la serie numérica. No se añaden nuevas relaciones elementales, sino sólo nuevos elementos y relaciones entre los nuevos y los antiguos. Las leyes del dominio expandido incluyen las del más estrecho, pero de tal manera que no se establecen nuevas leyes para el dominio antiguo (Hua XII: 462).

Efectivamente, Husserl explícitamente está señalando que un dominio numérico no puede ampliarse de tal manera que el mismo sistema axiomático describa el dominio más amplio. Si el mismo sistema axiomático es válido para ambos dominios, entonces el dominio más estrecho no se extendió en absoluto. Las nuevas proposiciones deben ser verdaderas en el dominio más amplio (y, por tanto, la extensión de *T* a *T'* no puede ser únicamente conservativa).

> Según esto, parece resultar la siguiente ley general: un tránsito a través de lo imaginario está permitido si 1) lo imaginario puede ser definido formalmente en un sistema deductivo consistente y completo, y si 2) el dominio original de la deducción formalizada tiene la propiedad de que cada proposición que caiga dentro de ese dominio o bien es verdadera sobre la base de los axiomas de ese dominio o bien es falsa sobre la misma base (es decir, es contradictoria con los axiomas). Sin embargo, se ve fácilmente que esta formulación no basta, aunque ya expresa la parte más esencial de la verdad [...] Pero queda la cuestión de si las proposiciones derivadas del dominio más amplio caen dentro del

> dominio más estrecho en el mismo sentido. Si esto no está determinado de antemano, no podemos decir absolutamente nada al respecto (2001: 104 / K I 26: 83).

Hay que destacar dos puntos importantes de la cita anterior. En primer lugar, el papel de la consistencia y la definición en la creación de un sistema axiomático para el dominio original. En segundo lugar, que estos requisitos no son suficientes para que las proposiciones sobre el dominio más estrecho estén permitidas, si es que son verdaderas, en el dominio más amplio, lo que plantea la pregunta de cómo se puede demostrar este resultado. Husserl argumenta que esto se puede demostrar si la extensión del concepto de número no induce nuevas determinaciones sobre el antiguo dominio. Ciertamente, piensa Husserl, una proposición que tiene sentido para A_w no necesariamente tiene que ser verdadera en el dominio de A (2001: 103 / K I 26: 95), lo que él confirma es que, si se formaliza una teoría y se expande de un modo consistente, lo expandido, incluso cuando corresponda a un sistema de entidades pertenecientes a dicha teoría, no mantiene su consistencia dependiente de los axiomas de aquella teoría. Por esta razón, es importante definir a lo imaginario en un sistema deductivo consistente y comprensivo, pues esto permite que toda proposición extendida que caiga dentro del dominio original se decida sobre la base de los axiomas del sistema extendido y del original mismo (2001: 103-104 / K I 26: 83-84).

Pero el asunto es todavía más profundo. Lo que ahora se está intentando comprender es que introducir un elemento imaginario no es simplemente extender A en A_w (como en el ejemplo anterior). Tal como se advirtió páginas atrás, Husserl va más allá cuando enfatiza que lo imaginario debe tener su propio dominio, es decir, A_w es extensión de A si y sólo si A_w reinterpreta estructuralmente los axiomas de A en un contexto más amplio. En las conferencias de Gotinga, Husserl abiertamente señala que todo dominio de números de un nivel inferior está contenido completamente en los niveles superiores (2001: 98-99 / K I 26: 43). La idea sobre la relación entre dos dominios es que básicamente uno está contenido en el otro (si cada objeto en el dominio M también aparece en N y todas las operaciones definidas en *M* están definidas en *N*, entonces *M* está contenido en *N*). Esta relación de inclusión es fundamental para la transición de lo imaginario y también se aplica a la construcción de los números. El isomorfismo entre *M* y *N* implica equivalencia elemental, lo que significa que cualquier afirmación verdadera en el dominio más estrecho también lo es en su copia contenida en el dominio más amplio o en cualquier dominio isomorfo.

De acuerdo con este nuevo emplazamiento, Husserl desarrolla la posibilidad de un sistema completo que pueda ser ampliado por la introducción adicional de un axioma independiente que mantenga abierto su dominio de objetos. En el caso de un sistema de este tipo, sus elementos son definidos de forma exhaustiva con respecto a sus relaciones formales y solamente podría ampliarse mediante la adición de axiomas donde las consecuencias del sistema no-extendido formen un subconjunto de las consecuencias del sistema ampliado. Teniendo en cuenta lo anterior, lo que sigue es "ofrecer" un dominio a este sistema no interpretado o extendido. Según lo antes expuesto, una teoría no interpretada tiene por dominio una variedad formal (colección de objetos *formales*). Por ejemplo: $3 < 5$ se expresa mediante $x\ R\ y$, donde R es una relación entre las variables x e y que denotan un objeto. También podría describir lo anterior de la siguiente manera: *dos objetos indeterminados que se encuentran en una relación binaria determinada*. Según lo preliminar, se puede decir que para Husserl el estado de cosas (objetual) de una teoría no interpretada definida son las formas puras o indeterminadas. Por tanto, una teoría no interpretada, vista simplemente como una colección de objetos formales, denota la forma de un dominio objetivo o, en otras palabras, se trata de un dominio caracterizado exclusivamente con respecto a su forma (da Silva, 2000b, 2010, 2017). Ya con todos estos antecedentes se puede dar solución a los problemas antes presentados, a saber:

1) ¿En qué condiciones es AΓ, la expansión de AG, consistente?

2) ¿En qué condiciones es conservativa la teoría AΓ sobre A_G?

Desde el punto de vista de los dominios formales axiomatizados, la extensión de los sistemas axiomáticos está "condicionada" por un requisito para preservar las dimensiones estructurales y operacionales de un dominio de inicio; ciertas operaciones posibles en general permanecen abiertas y, por tanto, ciertas propuestas posibles en general no están fijadas por él (Hua XII: 453). Concebida de esta manera, la extensión de un sistema axiomático, que agrega axiomas externos y nuevas leyes de operación a un sistema de inicio, no opera con una modificación del campo inicial, sino con un cambio de dominio. En otras palabras, sobre la base de la identificación de las propiedades (potenciales) de las extensiones del sistema axiomático que definen sus dominios, la cuestión de la extensión se expresa en términos de la conservación parcial del nuevo dominio respecto de su dominio restringido de inicio. En consecuencia, la extensión de un sistema de axiomas no debe entenderse como un proceso de ampliación, por así decirlo, desde dentro de un sistema de inicio, sino como la expresión de un dominio "más grande" que contiene un sistema restringido como una de sus partes. En otras palabras, en lugar de centrarse en la preservación de los teoremas de una teoría, la definitud absoluta como completud semántica se enfoca en preservar las oraciones verdaderas de ciertos dominios isomórficos, es decir, que tienen la misma estructura semántica. Hay sistemas axiomáticos categóricos[10] para diferentes tipos de números, como los naturales o los enteros, que son capaces de capturar completamente el significado de todas las oraciones verdaderas en el lenguaje formal. Según Husserl, la extensión del concepto de número no debe introducir nuevas determinaciones en los dominios más estrechos, sino que debe entenderse como una inclusión donde los dominios más altos

10 Husserl en ningún momento habla de categoricidad de un sistema axiomático, pero sí parece dar a entender que cualquier modelo que satisfaga los axiomas de la teoría es isomórfico a cualquier otro modelo que también satisfaga esos mismos axiomas. En otras palabras, si dos modelos satisfacen los mismos axiomas, entonces son estructuras idénticas en términos de las relaciones que se definen entre los objetos matemáticos, esto significa que todas las oraciones verdaderas en un modelo se preservan en cualquier otro modelo isomórfico. Por tanto, si un sistema axiomático es categórico, entonces necesariamente es semánticamente completo, ya que todas las oraciones verdaderas en cualquier modelo isomórfico son demostrables en el sistema.

contienen copias de los niveles anteriores. En resumen, la definitud absoluta como completud semántica implica que los sistemas axiomáticos deben ser capaces de capturar completamente el significado de todas las oraciones verdaderas en el lenguaje formal en diferentes dominios isomórficos y no solo (y únicamente) preservar los teoremas de una teoría.

Ahora bien, dada la preservación de las dimensiones estructurales y operativas de un dominio formal "incluido" en un dominio mayor extendido, se debe conservar la verdad de las proposiciones derivadas del sistema axiomático del dominio de inicio. Así, cuando se agregan a un sistema axiomáticos los axiomas que son independientes de él, estén o no conectados de manera deductiva, los axiomas extendidos serán "compatibles" con el sistema axiomático inicial que contiene deductivamente. En particular, la conclusión de que la teoría extendida es conservativa no se deriva de la premisa de que es consistente como parece sostener la teoría de la permanencia de Hankel. La conservatividad se debe probar por separado para cada teoría.

Conclusiones

Husserl sintetiza el resultado de sus reflexiones señalando que el paso a través de lo imaginario es posible 1) si el imaginario puede definirse formalmente en un sistema completo y consistente; 2) si el campo o teoría original tiene la propiedad de que cada proposición que cae dentro de ella se decide sobre la base de los axiomas del campo; 3) la extensión de una teoría interpretada sólo puede lograrse ampliando el lenguaje utilizado (para describirlo con nuevos símbolos) y 4) se deben introducir nuevos axiomas para definir las entidades imaginarias y extender las operaciones definidas anteriormente. Así, la solución presentada en las conferencias de Gotinga para el problema de los imaginarios nos dice que, desde una perspectiva formal, las entidades imaginarias pueden tratarse como entidades efectivas siempre y cuando se establezcan las condiciones lógicas bajo las cuales se puede permitir dicho tratamiento.

Finalmente, Husserl se ocupó de varios temas relacionados con la completud de los sistemas de axiomas, especialmente en relación con el problema de los números imaginarios. Identificó diferentes propiedades de las teorías absolutamente definidas, que finalmente fueron clasificadas por Fraenkel y Carnap como conceptos de completitud. Husserl sostiene que la categoricidad, la no-bifurcabilidad o no-ramificación y la decidibilidad son las formas formales en que se puede expresar la definibilidad absoluta. Sin embargo, su aproximación a la completud sigue siendo principalmente informal, y una noción más precisa de isomorfismo podría haber sido útil para desarrollar una noción matemática de la completud absoluta. Por último, Husserl no contaba con herramientas formales para incorporar un lenguaje formal y una noción clara de demostrabilidad.

Referencias

Aranda, V. (2020). Completeness, Categoricity and Imaginary Numbers: The Debate on Husserl. *Bulletin of the Section of Logic*, *49*(2): 109-125 http://dx.doi.org/10.18778/0138-0680.2020.07

(2021). Completeness: From Husserl to Carnap. *Logica Universalis*, 16: 57-83. https://doi.org/10.1007/s11787-021-00283-4.

Canela Morales, L. A. (2019) From Grassmann, Riemann to Husserl. A brief history of concept of Manifold, *META: Research in Hermeneutics, Phenomenology and Practical Philosophy*, *XI*(2): 473-500.

(2023) *Ser y calcular. El problema de las entidades matemáticas en la fenomenología temprana de Edmund Husserl*. Editorial Aula de Humanidades.

Centrone, S. (2010). *Logic and Philosophy of Mathematics in the Early Husserl*. Springer.

Da Silva, J. J. (2000a). Husserl's two Notions of Completeness, Husserl and Hilbert on Completeness and Imaginary Elements in Mathematics. *Synthese*, *125*(3): 417-438.

(2000b). The Many Senses of Completeness. *Manuscrito*, *23*(2): 41-60.

(2010). Beyond Leibniz: Husserl's Vindication of Symbolic Knowledge. M. Hartimo (ed.), *Phenomenology and Mathematics*. Springer: 123-145.

(2017). *Mathematics and Its Applications. A Transcendental-Idealist Perspective*. Springer.

Gustavo Isaac, M. (2015). L'idée de la logique formelle dans les appendices VI à X du volume 12 des Husserliana (1970). *History and Philosophy of Logic*, *36*(4): 321-345.

Hartimo, M. (2007). Towards Completeness: Husserl on Theories of Manifolds 1890-1901. *Synthese*, *156*(2): 281-310.

(2021). *Husserl and Mathematics*. Cambridge University Press.

Husserl, E. (1970). *Philosophie der Arithmetik.* Mit ergänzenden Texten (1890-1901). *Husserliana*, Band XII. L. Eley (ed.). Martinus Nijhoff.

(1974). *Formale und Transzendentale Logik: Versuch einer Kritik der logischen Vernunft*. *Husserliana*, Band XVII. P. Janssen (ed.). Martinus Nijhoff.

(1976). *Ideen zu einer reinen Phänomenologie und phänomenologischen Philosophie*. Ergänzende Texte (1912-1929). *Husserliana*, Band III/1. K. Schuhmann (ed.). Martinus Nijhoff.

(1984). *Logische Untersuchungen. Zweiter Band – I. Teil: Untersuchungen zur Phänomenologie und Theorie der Erkenntnis*. *Husserliana*, Band XIX/1. U. Panzer (ed.) Martinus Nijhoff.

(1985) *Einleitung in die Logik und Erkenntnistheorie. Vorlesungen 1906/07*. *Husserliana*, Band XXIV. U. Melle (ed.) Martinus Nijhoff.

(2001). Husserls Manuskripte zu seinem Göttinger Doppelvortrag von 1901. K Schuhmann y E. Schuhmann (eds.), *Husserl Studies*, Band 17. Kluwer Academic Publishers: 87-123.

Majer, U. (1997). Husserl and Hilbert on Completeness. A Neglected Chapter in Early Twenty Century Foundation of Mathematics. *Synthese*, *110*(1): 37-56.

Okada, M. (2013). Husserl and Hilbert on Completeness and Husserl's Term Rewrite-based Theory of Multiplicity (Invited paper). F. van Raamsdonk (ed.), *24th International Conference on Rewriting Techniques and Applications, RTA'13*. Eindhoven.: 4-19.

Ortiz Hill, C. (1995). Husserl and Hilbert on Completeness. J. Hintikka (ed.), *From Dedekind to Gödel*. Kluwer Academic Publishers: 143-163.